7 Affine Abbildungen

Der Nullpunkt $\vec{0}$ war bis jetzt immer Fixpunkt unserer Abbildungen. Nun wollen wir auch noch Translationen zulassen:

Definition 7.1. Eine Abbildung $h : k^n \longrightarrow k^n$ heisst affin, wenn es eine lineare Abbildung $f : k^n \longrightarrow k^n$ und einen Vektor $\vec{z} \in k^n$ gibt, so dass gilt:

$$(\forall \vec{v} \in k^n)(h(\vec{v}) = f(\vec{v}) + \vec{z})$$

Affine Abbildungen sind also Zusammensetzungen von linearen Abbildungen und Translationen.

Lemma 7.2. Ist h eine affine Abbildung von $k^n \longrightarrow k^n$, so sind die lineare Abbildung f und der Vektor $\vec{z}$ mit $h(\vec{v}) = f(\vec{v}) + \vec{z}$ für alle $\vec{v} \in k^n$ eindeutig bestimmt.

Beweis: $\vec{z}$ ist als Funktionswert von $\vec{0}$ festgelegt: $\vec{z} = h(\vec{0})$. Daraus folgt $f(\vec{v}) = h(\vec{v}) - \vec{z}$, also ist f eindeutig bestimmt. □

Definition 7.3. $h : k^n \longrightarrow k^n$ sei eine affine Abbildung mit $h(\vec{v}) = f(\vec{v}) + \vec{z}$ für alle $\vec{z} \in k^n$. Dann setzen wir $\det(h) = \det(f)$.

h „erbt" also die Determinante von der zugehörigen linearen Abbildung.

Lemma 7.4. Es sei $h : k^n \longrightarrow k^n$ eine affine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) h ist bijektiv

ii) $\det(h) \neq 0$

Beweis: Lemma 7.2 und Korollar 4.6. Die Translationen sind ja immer bijektiv. □

Bijektive affine Abbildungen heissen auch *Affinitäten*.

Satz 7.5. Die Menge aller Affinitäten in k^n bildet eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung der Abildungen.

Beweis:

- die Zusammensetzung zweier Affinitäten ist wieder eine Affinität. Sei $h(\vec{v}) = f(\vec{v}) + \vec{z}$ und $l(\vec{v}) = g(\vec{v}) + \vec{w}$. Dann ist
$$\begin{aligned} h \circ l\,(\vec{v}) &= f(g(\vec{v}) + \vec{w}) + \vec{z} = f(g(\vec{v})) + f(\vec{w}) + \vec{z} \\ &= f \circ g\,(\vec{v}) + (f(\vec{w}) + \vec{z}) = m(\vec{v}) + \vec{u} \end{aligned}$$
- die Zusammensetzung von Abbildungen ist immer assoziativ
- $h(\vec{v}) = E(\vec{v}) + \vec{0}$ ist das Neutralelement
- zu $h(\vec{v}) = f(\vec{v}) + \vec{z}$ existiert wegen $\det(h) = \det(f)$ die lineare Abbildung f^{-1}. Wir setzen $k(\vec{v}) = f^{-1}(\vec{v}) - f^{-1}(\vec{z})$ und es gilt $h \circ k = k \circ h = \mathbb{1}$ □

Für den praktischen Umgang mit Affinitäten ist es wichtig, dass man die Translation in die Matrizenrechnung einbauen kann. Wir machen ein Beispiel:

Es sei $h(\vec{v})$ definiert durch

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & 2\cdot x & + & y & + & 3\cdot z & + & 5 \\ y' & = & x & + & y & & & + & 2 \\ z' & = & x & & & + & 4\cdot z & + & 3 \end{array}$$

Es ist $h(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}+\vec{z}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mit dem folgenden „Trick“ lässt sich die affine Abbildung h mit einer einzigen Matrix-Multiplikation realisieren:

$$\text{Setze } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt $h(\vec{v}) = \tilde{A}\cdot\vec{v}$!

Definition 7.6. Zu einer affinen Abbildung $h(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}+\vec{z}$ in k^n definieren wir die *erweiterte Matrix* $\tilde{A}$ durch

- $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ falls $i \le n$ und $j \le n$
- $\tilde{a}_{n+1,j} = 0$ falls $j \le n$
- $\tilde{a}_{n+1,n+1} = 1$
- $\tilde{a}_{i,n+1} = z_i$ falls $i \le n$

Lemma 7.7. Ist $\tilde{A}$ die erweiterte Matrix zu $h(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}+\vec{z}$, so gilt $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

Beweis: Übungsaufgabe □

Aufgaben

1. Beweisen Sie das Lemma 7.7
2. Bestimmen Sie auf zwei Arten die inverse Abbildung zu $h(\vec{v})$ im Beispiel vor der Definition 7.6
3. Beweisen Sie: Affinitäten bilden Geraden in k^n auf Geraden in k^n ab
4. Beweisen Sie: Sind A, B, C drei Punkte auf einer Geraden in $\mathbb{R}^n$, so bildet eine Affinität die drei Punkte auf A', B' und C' ab mit $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\cdot\overrightarrow{A'C'}$, wenn $\overrightarrow{AB} = \lambda\cdot\overrightarrow{AC}$. Affine Abbildungen sind „teilverhältnistreu“, sie erhalten Verhältnisse auf einer Geraden.
5. Affinitäten sind auch „parallelentreu“, d. h. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Longrightarrow h(\vec{u}) \parallel h(\vec{v})$

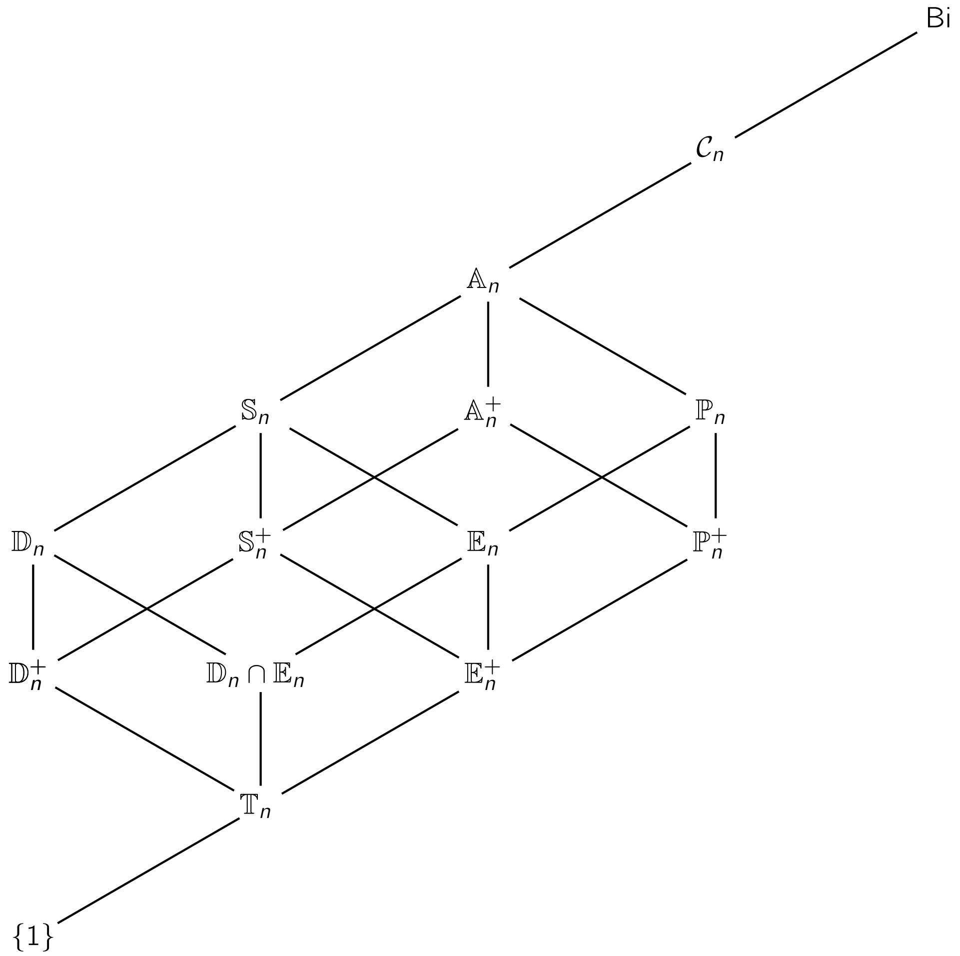
6. Die drei Punkte A, B und C sollen in k^2 ein Dreieck bilden, sie sollen also nicht auf einer Geraden liegen. Dann definiert jede Wahl von drei Bildpunkten A', B' und C' eine affine Abbildung von k^2 nach k^2

7. Was ist die analoge Aussage zu **6.** für k^3?

8. Zeigen Sie allgemein, dass das Produkt zweier „erweiterter Matrizen“ wieder eine Matrix von dieser Gestalt liefert

9. Aufgaben zu §15 von “Bachmann“

Das folgende Diagramm zeigt den Verband der wichtigsten Untergruppen der affinen Gruppe von k^n. Diese Gruppen sind für $n \geq 2$ alle verschieden von einander.



$\{1\}$ Die Gruppe besteht nur aus der identischen Abbildung. Diese erhält alle möglichen Eigenschaften, sogar die absolute Lage der Punkte im Raum.

$\mathbb{T}_n$ Die Gruppe der Translationen. Sie erhalten Längen, Winkel, Richtungen, den Richtungssinn, die Orientierung, Flächen, Volumina, Streckenverhältnisse, sind geradentreu usw.

$\mathbb{E}_n^+$ Das sind die orientierungserhaltenden Kongruenzabbildungen. Zu $\mathbb{T}_n$ sind also die Rotationen hinzugekommen. Die Kongruenzabbildungen sind nicht mehr richtungstreu.

$\mathbb{P}_n^+$ Das sind die „Procrustean stretches", die volumentreuen und orientierungstreuen Affinitäten. Ihre Determinante ist $+1$. Sie sind (wie alle Affinitäten) noch geradentreu und verhältnistreu auf jeder Geraden.

$\mathbb{D}_n^+$ Diese Gruppe der Dilatationen erhalten wir, wenn wir zu den Translationen die zentrischen Streckungen mit positiver Determinante hinzunehmen. Sie sind noch richtungstreu und erhalten alle Streckenverhältnisse, nicht nur solche auf einer Geraden. Sie sind auch winkeltreu, aber nicht mehr längentreu und volumentreu.

$\mathbb{S}_n^+$ Das sind die Ähnlichkeiten mit positiver Determinante. Man erhält sie, wenn man zu $\mathbb{E}_n^+$ die Streckungen (mit positiver Determinante) hinzunimmt oder wenn man zu den Dilatationen $\mathbb{D}_n^+$ die Rotationen hinzunimmt. Sie erhalten Winkel und alle Streckenverhältnisse und auch die Orientierung (Linkssystem – Rechtssystem).

$\mathbb{A}_n^+$ Verzichtet man auf die Erhaltung aller Längenverhältnisse, so kommt man von $\mathbb{S}_n^+$ zu $\mathbb{A}_n^+$. Es kommen hier die Euler-Streckungen hinzu! Von $\mathbb{P}_n^+$ gelangt man zu $\mathbb{A}_n^+$ durch die Hinzunahme der Streckungen mit positiver Determinante.

$\mathcal{C}_n$ $\mathcal{C}_n \sim$ continous. Damit bezeichnen wir die stetigen Abbildungen des Raumes. Stellen Sie sich vor, dass zuerst eine Affinität durchgeführt wird. Anschliessend wird der Raum noch wie Knetmasse deformiert, ohne dass sich Risse oder Löcher ergeben ...

Bi Bi($\mathbb{R}^n$) sind alle bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$. Das sind sehr viele ... Der Raum kann dabei beliebig zerstückelt und wieder neu zusammen gesetzt werden. Die Nachbarschaft von Punkten muss also *nicht* erhalten bleiben.

Bei einer stetigen Abbildung f gilt noch:

Ist (a_n) eine Folge mit dem Grenzwert b, dann konvergiert die Folge $f(a_n)$ gegen $f(b)$.

Die stetigen Abbildungen brauchen nicht mehr geradentreu zu sein, was das Wesentliche der „Linearität" ausmacht. Es gilt der

Satz 7.8. Jede geradentreue Abbildung in k^n ist eine Affinität, falls $n \geq 2$.

Vom „Boden" zum „Deckel" des Verbandes gelangt man immer durch die Hinzunahme einer Diagonalmatrix mit einer -1 und sonst lauter Einsen auf der Haupdiagonalen. Damit sind auch negative Determinanten gestattet, was gleichbedeutend ist damit, dass die Orientierung nicht mehr erhalten bleiben muss. Erläutern Sie bei jeder Kante des Diagramms, welche Abbildungen da noch hinzugekommen sind!

Wichtige Untergruppen von $\mathbb{E}_n$ erhält man, wenn man statt allen Translationen nur diejenigen zulässt, die ein regelmässiges *Gitter* invariant lassen. Denken Sie dabei 2d an ein Tapetenmuster und 3d an ein Kristallgitter. Die Gruppe der Translationen sieht dort folgendermassen aus:

$$T = \{\, \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} + \nu \cdot \vec{w} \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z} \,\}$$

Es zeigt sich, dass dadurch die möglichen Rotationen enorm eingeschränkt werden.

Es gibt (bis auf Ähnlichkeit in Sinne von $\simeq$) genau 17 Typen von Tapeten im $\mathbb{R}^2$ und 230 Typen von Kristallgittern im $\mathbb{R}^3$...

Aufgaben

1. Wie bestimmt man die *Fixpunkte* einer Affinität?

2. Wie bestimmt man die *Fixgeraden* einer Affinität?

3. Wie bestimmt man die *Fixpunktgeraden* einer Affinität?

4. Zeigen Sie: Der Schnittpunkt zweier Fixgeraden ist ein Fixpunkt.

5. a) Definieren Sie eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^3$ auf sich selber, welche nicht stetig ist.
   b) Definieren Sie eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf sich selber, welche zwar stetig ist, aber nicht geradentreu.

6. Eine Ebene ist ein 2d-Unterraum von k^n, welcher um eine beliebige Translation verschoben ist:
$$\vec{x} \in E \iff \vec{x} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} + \vec{w}; \quad \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ linear unabhängig}$$
   Eine *Hyperebene* ist ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von k^n, welcher um eine beliebige Translation verschoben worden ist.

   Hyperebenen in k^3 sind also Ebenen, Hyperebenen in k^2 sind demnach Geraden.

7. *Perspektive Affinitäten* sind Affinitäten, welche eine Hyperebene punktweise fix lassen. Perspektive Affinitäten in k^2 sind also Affinitäten, die eine Fixpunktgerade besitzen.

8. Welche spezielle Gestalt hat die erweiterte Matrix $\tilde{A}$ einer perspektiven Affinität bei geschickter Wahl der Basisvektoren?

9. Geben Sie Beispiele von perspektiven Affinitäten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Geben Sie jeweils auch die erweiterte Matrix $\tilde{A}$ an.

10. Perspektive Affinitäten besitzen einen „invarianten rechten Winkel“.

11. Aufgaben zu §16 von „Bachmann“.

Version 1.1, vom April 2015

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, im November 2014

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün im April 2015

Anwendungen der Matrizenrechnung

(1) Dimensionsberechnungen mit rref(. . .)

(2) Berechnung von $\dim(\mathrm{MQ}_n(k))$

(3) Berechnung von $\dim(\mathrm{SMQ}_n(k))$

(4) Lösungsräume von Systemen linearer Gleichungen. Beispiele zu allen Fällen mit 3 Unbekannten und 3 Gleichungen.

(5) Textverschlüsselung mit invertierbaren Matrizen über $\mathbb{Z}_p$

(6) Beschreibung der 7 Symmetriegruppen von Band-Ornamenten (auch Friesgruppen genannt) mit Matrizen

(7) Beschreibung der 10 2d-Punktgruppen und den zugehörigen 17 Tapetengruppen mit Matrizen

(8) Beschreibung der 32 3d-Punktgruppen durch Matrizen

(9) Spezielle Relativitätstheorie mit Vierervektoren und Matrizen

(10) Lösungsräume von linearen Diffentialgleichungen, mit Beispielen (nach Papula 2)

(11) Stochastische Matrizen, Markow-Prozesse

(12) Der Barnsley-Farn: Die Erzeugung von fraktalen Pflanzen mithilfe weniger affiner Abbildungen

(13) Klassifizierung aller quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten und Zuordnung der zugehörigen Kegelschnitte

(14) Klassifizierung aller affiner Selbstabbildungen von $\mathcal{E}$ oder $\mathcal{R}$, Reduktion derselben auf „Normalformen“

(15) „Heli-Control“: Auswertung der drei Rotations-Sensoren in einem Helikopter und rechnerische Nachführung der Lage im Raum