2 Basis und Dimension

Definition 2.1. Es sei V ein VR über k. M sei eine beliebige Menge von Vektoren aus V, also $M \subset V$. M heisst *erzeugend*, wenn jeder Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus M geschrieben werden kann.

Ist M erzeugend, so gibt es also zu jedem Vektor $\vec{v} \in V$ Vektoren $\vec{a}_i \in M$ und Zahlen $\lambda_i \in k$, sodass gilt

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$$

M enthält dann *genügend viele* Vektoren, um jeden andern Vektor daraus zu bilden. Endliche Summen von Vielfachen von Vektoren aus M ergeben schon ganz V.

Definition 2.2. Es sei V ein VR über k. M sei eine beliebige Menge von Vektoren aus V, also $M \subset V$. M heisst *linear unabhängig*, wenn kein Vektor aus M als (endliche) Linearkombination der übrigen Vektoren von M geschrieben werden kann.

Ist M linear unabhängig, so kann man keinen Vektor aus M entfernen, ohne dass die Menge der Vektoren, die mit Linearkombinationen aus M gebildet werden kann, kleiner wird. In M ist kein Vektor ‚überflüssig'.

Definition 2.3. Es sei V ein VR über k. Eine Menge $M = \{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \,\}$ von Vektoren aus V heisst eine *Basis* von V, wenn M sowohl erzeugend als auch linear unabhängig ist.

Basen enthalten also genügend Vektoren, um alle anderen daraus als Linearkombination zu erzeugen, aber sie enthalten auch keinen Vektor zuviel. Basen sind somit minimale erzeugende Mengen oder maximale linear unabhängige Mengen. Es gilt noch zu zeigen, dass jeder VR überhaupt eine Basis besitzt!

Für diesen Beweis brauchen wir noch alternative Formulierungen dafür, dass $M \subset V$ linear unabhängig ist:

Satz 2.4. Es sei V ein Vektorraum über k, und $M = \{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \,\} \subset V$. Dann sind folgende 2 Aussagen äquivalent:

($\mathcal{A}$) M ist linear unabhängig

($\mathcal{B}$) $[\,\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots \lambda_n \cdot \vec{e}_n = \vec{0}\,] \implies \lambda_i = 0$ für alle i

Gleichbedeutend ist die Behauptung, dass $(\neg\mathcal{A})$ und $(\neg\mathcal{B})$ äquivalent sind:

($\neg\mathcal{A}$) M ist linear abhängig

($\neg\mathcal{B}$) $[\,\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k\,]\ \big[\sum \lambda_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ und mindestens ein $\lambda_i \neq 0\big]$

$\mathcal{B}$ besagt, dass es nur die *triviale* Linearkombination gibt für den Nullvektor, $\neg\mathcal{B}$ bedeutet, dass es eine nichttriviale Linearkombination für den Nullvektor gibt.

Beweis. Wir zeigen $(\neg\mathcal{A}) \iff (\neg\mathcal{B})$.

i) Sei also $\neg\mathcal{A}$, d. h. man kann einen Vektor aus M als Linearkombination der übrigen schreiben: OBdA

$$\vec{e}_1 = \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$$

Dann ist

$$\vec{0} = -1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n,$$

und wir haben $\neg\mathcal{B}$, da der Koeffizient von $\vec{e}_1$ verschieden ist von Null.

ii) Ganz ähnlich geht die Umkehrung: Es gelte also $\neg\mathcal{B}$: Dann gilt

$$\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$$

und mindestens ein λ_i ist dabei nicht null. OBdA sei $\lambda_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 &= -\lambda_2 \cdot \vec{e}_2 - \lambda_3 \cdot \vec{e}_3 - \ldots - \lambda_n \cdot \vec{e}_n \quad \text{und} \quad (\lambda_1 \neq 0\,!) \\ \vec{e}_1 &= -\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \vec{e}_2 - \tfrac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \vec{e}_3 - \ldots - \tfrac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \vec{e}_n, \quad \text{also} \quad \neg\mathcal{A} \end{aligned}$$

□

Nun können wir das Wesen einer Basis von V noch schärfer umreissen:

Lemma 2.5. Sei V ein VR über k, und es sei $M = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \subset V$. Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

i) M ist eine Basis von V

ii) Zu *jedem* Vektor von V gibt es *genau eine* Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus M

Ist M eine solche Basis, dann existiert zu jedem Vektor $\vec{v}$ genau ein n-Tupel von Zahlen $\lambda_i \in k$ sodass

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$$

Beweis

i) $\Longrightarrow$ ii) Wenn M eine Basis von V ist, dann ist M erzeugend und es exstiert zu jedem Vektor $\vec{v} \in V$ eine Linearkombination mit $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$. Gäbe es eine andere: $\vec{v} = \mu_1 \cdot \vec{e}_1 + \mu_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \vec{e}_n$, wobei mindestens ein $\lambda_i \neq \mu_i$, so könnten wir die beiden Zeilen subtrahieren und wir hätten eine nicht-triviale Linearkombination für den Nullvektor! Dies ist aber nicht möglich, wenn M linear unabhängig ist.

ii) $\Longrightarrow$ i) Es lasse sich also *jeder* Vektor aus V auf *genau eine* Art als Linearkombination der $\vec{e}_i$ schreiben. Dann ist M sicher erzeugend, und die Darstellung

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

ist die *einzige* für den Nullvektor. M muss also nach Satz 2.4 auch linear unabhängig sein.

□

Lemma 2.6. Es seien $A = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \}$ und $B = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \}$ zwei Basen des VR V. Dann können wir $\vec{a}_1$ in B hineinschmuggeln und damit *einen* der Vektoren $\vec{b}_i$ ersetzen, und die entstandene Menge C ist wieder eine Basis von V.

Können wir z. B. den Vektor $\vec{b}_1 \in B$ ersetzen, dann ist $C = \{ \vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_n \}$ wieder eine Basis von V.

Beweis

Da B eine Basis ist von V, gibt es eine Darstellung

$$\vec{a}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n,$$

und wegen $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ muss mindestens *ein* λ_i verschieden sein von null. Es sei also oBdA $\lambda_1 \neq 0$:

Dann ist

$$-\lambda_1 \cdot \vec{b}_1 = -\vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{b}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n$$

und dann, wegen $\lambda_1 \neq 0$,

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\lambda 1} \cdot \vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda 1} \cdot \vec{b}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \vec{b}_3 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda 1} \cdot \vec{b}_n$$

$\vec{b}1$ wird also von $C = \{ \vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_n \}$ ebenfalls erzeugt, und somit ist die Menge C sicher erzeugend.

Da B auch linear unabhängig ist, sind die Koeffizienten λ_i in der Darstellung von $\vec{a}_1$ eindeutig bestimmt. Wir zeigen nun, dass auch die Darstellung von $\vec{v}$ über C eindeutig bestimmt ist, also dass C auch linear unabhängig ist:

Sei $\vec{v} \in V$ beliebig: Dann gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ mit

$$\vec{v} = \mu_1 \cdot \vec{b}_1 + \mu_2 \cdot \vec{b}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \vec{b}_n,$$

also

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \mu_1 \cdot (\tfrac{1}{\lambda 1} \cdot \vec{a}_1 - \tfrac{\lambda_2}{\lambda 1} \cdot \vec{b}_2 - \ldots - \tfrac{\lambda_n}{\lambda 1} \cdot \vec{b}_n) + \mu_2 \cdot \vec{b}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \vec{b}_n \\ &= \tfrac{\mu_1}{\lambda 1} \cdot \vec{a}_1 + (\mu_2 - \tfrac{\mu_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1}) \cdot \vec{b}_2 + \ldots + (\mu_n - \tfrac{\mu_1 \cdot \lambda_n}{\lambda_1}) \cdot \vec{b}_n \end{aligned}$$

In dieser Darstellung von $\vec{v}$ sind alle Koeffizienten eindeutig bestimmt!

□

Nun können wir die Früchte unserer Kleinarbeit pflücken:

Satz 2.7. Es seien $A = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \}$ und $B = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \}$ zwei Basen des VR V. Dann gilt $n = m$.

In jedem VR mit einer endlichen Basis ist die Anzahl der Basisvektoren in einer Basis eine Konstante.

Beweis

Wäre z. B. $n > m$: Wiederholte Anwendung von Lemma 2.6 würde schliesslich eine Basis (!) D ergeben mit

$$D = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, \vec{b}_{m+2}, \ldots, \vec{b}_n \}$$

im Widerspruch dazu, dass schon $A = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \}$ eine Basis ist!

□

Nun fehlt uns nur noch

Lemma 2.8. Jeder endlich erzeugte VR besitzt eine Basis.

Beweis

Es sei $M = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \}$ eine erzeugende Menge. Jeder Vektor von V lässt sich also als Linearkombination von Vektoren aus M schreiben:

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$$

Ist diese Darstellung nicht eindeutig, so gibt es noch eine andere:

$$\vec{v} = \mu_1 \cdot \vec{e}_1 + \mu_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \vec{e}_n,$$

wobei mindestens für ein i $\lambda_i \neq \mu_i$. Es sei z. B. $\lambda_2 \neq \mu_2$: Dann ist

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot \vec{e}_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{e}_n,$$
$$(\mu_2 - \lambda_2) \cdot \vec{e}_2 = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda_3 - \mu_3) \cdot \vec{e}_3 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{e}_n$$

und wegen $\lambda_2 \neq \mu_2$

$$\vec{e}_2 = \tfrac{\lambda_1 - \mu_1}{\mu_2 - \lambda_2} \cdot \vec{e}_1 + \tfrac{\lambda_3 - \mu_3}{\mu_2 - \lambda_2} \cdot \vec{e}_3 + \tfrac{\lambda_4 - \mu_4}{\mu_2 - \lambda_2} \cdot \vec{e}_4 + \ldots + \tfrac{\lambda_n - \mu_n}{\mu_2 - \lambda_2} \cdot \vec{e}_n$$

und wir können $\vec{e}_2$ weglassen, $M \setminus \{ \vec{e}_2 \}$ ist immer noch erzeugend! Diesen Prozess können wir solange wiederholen, als die Menge M noch nicht linear unabhängig ist, M bleibt dabei immer erzeugend. Nach endlich vielen Schritten landen wir bei einer Menge M, die erzeugend *und* linear unabhängig ist.

□

Damit ist die folgende wichtige Definition möglich:

Definition 2.9. Sei V ein VR über k. Die *Dimension* von V ist die Anzahl der Vektoren, die irgendeine der Basen von V enthält.

Nach Lemma 2.8 besitzt jeder endlich erzeugte VR eine Basis, bestehend aus endlich vielen Vektoren, und nach Lemma 2.7 ist die Zahl dieser Vektoren eindeutig bestimmt.

Aufgaben

1. Geben sie einen VR V an, der die Dimension 2 hat.

2. Wie **1.**, aber für $\dim(V) = 1$.

3. Wie **1.**, aber für $\dim(V) = 0$!

4. Welche Dimension hat $\mathcal{E}$ als VR über $\mathbb{R}$? Wie sieht eine Basis von $\mathcal{E}$ immer aus?

5. Wie **4.**, aber für $\mathcal{R}$ als VR über $\mathbb{R}$.

6. Geben Sie zwei verschiedene Basen an für $\mathbb{R}^4$.

7. Geben Sie eine Basis an für $\mathbb{M}^{n \times m}(k)$.

8. Geben Sie eine Basis an für $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

9. (schwierig) Geben Sie eine Basis an für $\mathrm{MQ}_3(\mathbb{Z}_7)$.

10. (schwierig) Geben Sie eine Basis an für $\mathrm{SMQ}_3(\mathbb{Z}_7)$.

11. Wie können Sie prüfen, ob 3 Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind?

Wir können die x-y-Ebene des Raumes $\mathcal{R}$ mit der euklidischen Ebene $\mathcal{E}$ identifizieren. Dann ist $\mathcal{E}$ ein zweidimensionaler *Unterraum* des dreidimensionalen VR $\mathcal{R}$.

Diese Auffassung führt zu den folgenden Definitionen und Lemmatas:

Definition 2.10. Es sei V ein VR über k. M sei eine (kleine) Teilmenge von V.

Die *lineare Hülle* vom M ist die Menge aller Vektoren aus V, die sich als Linearkombinationen von (endlich vielen) Vektoren aus M schreiben lassen.

Definition 2.11. Es sei V ein VR über k, und U sei eine Teilmenge von V. U heisst ein *Unterraum* von V, wenn gilt

i) $[\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in U]\,[\vec{u} + \vec{v} \in U]$

ii) $[\forall\, \vec{u} \in U]\,[\forall\, \lambda \in k]\,[\lambda \cdot \vec{u} \in U]$

Vielfache und Summen von Vektoren aus U müssen wieder in U liegen, oder, anders gesagt, die lineare Hülle von U muss U selber sein.

Es ist kaum überraschend, dass die folgenden Lemmata gelten:

Lemma 2.12. Es sei M eine Teilmenge des VR V über k. Dann ist die lineare Hülle von M ein Unterraum von V.

Lemma 2.13. Es sei U ein Unterraum des VR V. Dann gilt

$$\dim(U) \leq \dim(V), \text{ und zudem}$$
$$\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$$

Lemma 2.14. Es sei V ein VR über k, und zudem seien U und W Unterräume von V. Dann ist auch $U \cap W$ ein Unterraum von V.

Die Beweise von Lemma 2.12, Lemma 2.13 und Lemma 2.14 sind Ihnen als Übungsaufgaben überlassen.

Zum Abschluss folgt noch eine Reihe von Beispielen und Aufgaben.

Beispiele und Aufgaben

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugt einen 2d-Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

   Benützt man die üblichen Basisvektoren, so handelt es sich um die x-y-Ebene.

2. Es sei V ein VR über k. Zudem sei $\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dann bilden alle Vielfachen von $\vec{v}$ einen 1d-Unterraum. So was nennen wir allgemein eine *Gerade* durch den Nullpunkt.

   Beispiel: $\left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\} \subset \mathrm{MQ}_3(\mathbb{Z}_5)$

3. Wir können $\mathcal{E}$ als 2d-Unterraum von $\mathcal{R}$ auffassen.

4. Wir können $\mathcal{E}$ auch als 1d-VR über $\mathbb{C}$ auffassen (die Gauss'sche Ebene).

5. Die Fibonacci-Folgen bilden einen Unterraum im VR aller Zahlfolgen. Welches ist seine Dimension? Geben Sie eine Basis an.

6. Die Polynomfunktionen $\mathbb{P}_5(k)$ bilden einen Unterraum im VR aller differentierbaren Funktionen auf $[a, b]$.

7. $\mathbb{P}_3(k)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{P}_5(k)$. Welches ist übrigens die Dimension von $\mathbb{P}_n(k)$?

8. Wir können die folgende Kette von Unterräumen bilden:

$$k^1 \subset k^3 \subset \mathbb{M}^{3\times3}(k) \subset \mathbb{M}^{3\times5}(k) \subset \ldots$$

9. Auch die folgenden Teilmengen sind Unterräume:

$$\mathrm{SMQ}_4(k) \subset \mathrm{MQ}_4(k) \subset \mathbb{M}^{4\times4}(k)$$

10. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{MQ}_3(k)$.

11. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{MQ}_4(k)$.

12. Was gilt wohl allgemein für die Dimension von $\mathrm{MQ}_n(k)$?

13. (knifflig) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{SMQ}_3(k)$ und geben Sie eine Basis an.

14. (knifflig) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{SMQ}_4(k)$ und geben Sie eine Basis an.

15. Was gilt wohl allgemein für die Dimension von $\mathrm{SMQ}_n(k)$?

16. Erweitern Sie Ihre Basis von $\mathrm{SMQ}_3(k)$ zu einer Basis von $\mathrm{MQ}_3(k)$.

17. (schwierig) Erweitern Sie Ihre Basis von $\mathrm{SMQ}_4(k)$ zu einer Basis von $\mathrm{MQ}_4(k)$.

18. Für ungerade n ist es leicht, Vektoren zu finden, die eine Basis von $\mathrm{SMQ}_n(k)$ zu einer Basis von $\mathrm{MQ}_n(k)$ erweitern.

19. Für gerade n ist es viel schwieriger, eine Basis von $\mathrm{SMQ}_n(k)$ zu einer Basis von $\mathrm{MQ}_n(k)$ zu erweitern!

20. Wenn Sie **12.** und **15.** gelöst haben, können Sie sicher einen Unterraum U angeben, für den gilt:

$$\mathrm{SMQ}_4(k) \subset U \subset \mathrm{MQ}_4(k) \text{ mit}$$
$$\dim(\mathrm{SMQ}_4(k)) < \dim(U) < \dim(\mathrm{MQ}_4(k))$$

21. Warum lässt sich der Prozess von **20.** für alle Kantenlängen $n \geq 3$ durchführen?

22. Alle Zufallsvariablen X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) bilden einen VR über $\mathbb{R}$. Sie lassen sich addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, und es gelten die üblichen Rechengesetze.

Version 2.4, vom September 2014

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, ab 1999

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp im September 2011